

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
XVI НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Национален кръг, 13 април 2013 г., Кърджали

Възрастова група IX-X клас – теоретичен кръг – решения

1 задача. Решение:

В периодите на максимална слънчева активност слънчевата константа има по-висока стойност въпреки че сумарната площ на по-хладните слънчеви петна е по-голяма. Това означава, че допълнителната енергия, която се излъчва от факелите, е достатъчно голяма, за да компенсира и надвиши недостига на излъчена енергия, свързан със слънчевите петна.

Да изберем един максимум на слънчевата активност – например този, който е бил малко преди 1960 г. Определяме по графиките сумарната площ на слънчевите петна S_{sm} , сумарната площ на факелите S_{fm} и слънчевата константа A_m за този максимум. Определяме същите величини и за минимума, който е бил преди този максимум – съответно S_{s0} , S_{f0} и A_0 . Означаваме с S цялата площ на видимия слънчев диск. Получаваме следните резултати:

	Максимум	Минимум
Площ на слънчевите петна	$0.004 S$	0
Площ на факелите	$0.032 S$	$0.001 S$
Слънчева константа	1366.63 W/m^2	1365.60 W/m^2

Съгласно закона на Стефан-Болцман абсолютно черно тяло, нагрят до температура T , излъчва от единица площ на своята повърхност за единица време енергия, равна на σT^4 . Следователно за енергията, достигаща до нас от Слънцето за единица време върху единица площ – или за слънчевата константа, могат да се напишат следните съотношения:

$$A_m \propto (S - S_{sm} - S_{fm})\sigma T^4 + S_{sm}\sigma T_s^4 + S_{fm}\sigma T_f^4 \quad \text{за максимум на слънчевата активност}$$

$$A_0 \propto (S - S_{s0} - S_{f0})\sigma T^4 + S_{s0}\sigma T_s^4 + S_{f0}\sigma T_f^4 \quad \text{за минимум на слънчевата активност}$$

Тук с T сме означили температурата на слънчевата фотосфера, там където няма петна или факели, а с T_s и T_f – температурите на петната и на факелите. Оттук получаваме:

$$\frac{A_m}{A_0} = \frac{(S - S_{sm} - S_{fm})T^4 + S_{sm}T_s^4 + S_{fm}T_f^4}{(S - S_{s0} - S_{f0})T^4 + S_{s0}T_s^4 + S_{f0}T_f^4}$$

От това уравнение определяме температурата на слънчевите факели:

$$T_f \approx 5960 \text{ K}$$

Ако използваме данни от други максимуми и минимуми на слънчевата активност, или пък усредним величините за множество цикли, навярно ще получим по-различни оценки, но можем да кажем, че температурата на факелите е с около 100 – 200 K по-висока, отколкото температурата на фотосферата извън петната и факелите.

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За отговор на въпроса защо при много петна потокът слънчева енергия се повишава, а не намалява – 2 т.

За определяне на величините от графиките – 3 т.

За правилна идея на метода за определяне на температурата на факелите – 2 т.

За правилна математическа постановка на метода за пресмятане – 4 т.

За правилна числена оценка – 1 т.

2 задача. Решение:

Означаваме с r_0 радиуса на земната орбита около Слънцето, а с $r_A = r_0 - \Delta r$ радиуса на орбитата на станцията STEREO A ($\Delta r = 5.58 \times 10^6$ км). Нека T_0 е орбиталният период на Земята около Слънцето, а T_A – периодът на станцията. Съгласно III закон на Кеплер:

$$\frac{r_A^3}{T_A^2} = \frac{r_0^3}{T_0^2}$$

Оттук намираме орбиталния период на станцията STEREO A:

$$T_A = T_0 \sqrt{\left(\frac{r_A}{r_0}\right)^3} \approx 0.9446 \text{ години} \approx 345 \text{ дни}$$

Да разгледаме движението на станциите в координатна система, в която Земята е неподвижна. След старта те ще се отдалечават по орбитите си от Земята в две противоположни посоки. Тъй като изискването е да са отклонени на еднакви ъгли симетрично от двете страни на Земята, то след време те и двете ще се озоват на 180° от Земята, а след още толкова време ще се съберат отново близо до Земята. Това означава, че синодичните периоди на двете станции са еднакви. Да пресметнем синодичния период T_S на станцията STEREO A:

$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_0}$$
$$T_S = \frac{T_0 T_A}{T_0 - T_A} \approx 17.0505 \text{ години}$$

Станцията STEREO B има същия синодичен период и следователно:

$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_B}$$

където T_B е сидеричният период или истинският орбитален период на станцията STEREO B. Оттук пресмятаме:

$$T_B = \frac{T_S T_0}{T_S - T_0} \approx 1.0623 \text{ години} \approx 388 \text{ дни}$$

Интервалът от време, за който след старта двете станции ще се отдалечат на 90° от двете страни на Земята и ще могат да фотографират двете противоположни страни на Слънцето, е равен на една четвърт от синодичния период на станциите:

$$17.0505 / 4 \approx 4.26 \text{ години} \approx 4 \text{ год. } 95 \text{ дни} = 1556 \text{ дни}$$

Критерии за оценяване (общо 10 т.):

За намиране на орбиталния период на станцията STEREO A – 2 т.

За съобразяване, че двете станции имат еднакъв синодичен период и обяснение – 2 т.

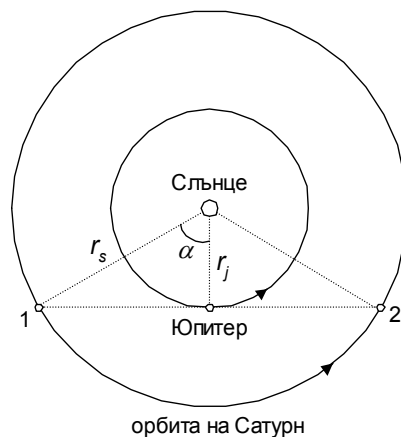
За определяне на синодичния период – 2 т.

За пресмятане на орбиталния период на станцията STEREO B – 2 т.

За определяне кога станциите ще са от две противоположни страни на Слънцето – 2 т.

3 задача. Решение:

Юпитерианският астроном любител е видял Сатурн да залязва в полунощ по местно време. Това означава, че Сатурн е бил в източна квадратура за наблюдател на Юпитер (положение 1 на схемата). Ъгловата скорост на Сатурн около Слънцето е по-малка от тази на Юпитер. Сатурн изостава по орбитата си в сравнение с Юпитер и следователно за юпитерианския наблюдател в следващите дни видимото му ъглово отстояние от Слънцето ще намалява. Това означава, че часът на залеза на Сатурн ще става все по-ранен и той ще се вижда за все по-кратко време във вечерното юпитерианско небе – Сатурн ще се приближава към горно съединение със Слънцето.



В условието са дадени приблизителни стойности, според които орбиталният радиус на Сатурн r_s е двойно по-голям от орбиталния радиус на Юпитер r_j . Оттук следва, че ъгълът α е равен на 60° . За да се наблюдава изгрев на Сатурн в полунощ, той трябва да е в западна квадратура – положение 2 на схемата. В координатна система, неподвижно свързана с Юпитер, планетата Сатурн трябва да се придвижи по часовниковата стрелка от положение 1 до положение 2, което съответства на ъгъл $360^\circ - 2 \times 60^\circ = 240^\circ$. Това движение ще се извършва с ъглова скорост, съответстваща на синодичния период на Сатурн T' . Можем да го намерим по формулата:

$$\frac{1}{T'} = \frac{1}{T_j} - \frac{1}{T_s}$$

където T_j и T_s са орбиталните периоди на Юпитер и Сатурн.

$$T' = \frac{T_s T_j}{T_s - T_j} = 20 \text{ години}$$

Търсеното време е:

$$t = T' \cdot \frac{240^\circ}{360^\circ} \approx 13.3 \text{ години}$$

При първоначалното наблюдение, когато е в положение 1, Сатурн се е виждал в съзвездие Водолей. Когато стигне до положение 2, той ще бъде на 120° източно от първоначалното си положение 1. Това съответства на 4 зодиакални съзвездия, или Сатурн трябва да се вижда в съзвездие Близнаци. Нека не забравяме, обаче, че сме в координатна система, която се върти около Слънцето заедно с Юпитер. За 13.3 години Юпитер ще направи една пълна обиколка по орбитата си и още малко над $1/12$ част от нея. Това означава, че Сатурн ще бъде в следващото след Близнаци зодиакално съзвездие, т.е. в Рак.

Критерии за оценяване (общо 14 т.):

За правилно определяне на първоначалната конфигурация на Сатурн – 2 т.

За обяснение и правилен отговор как ще се изменя времето на залез по-нататък – 2 т.

За посочване на конфигурацията, при която Сатурн ще изгрява в полунощ – 1 т.

За правилен математически метод за определяне на времето за достигане до тази конфигурация – 4 т.

За правилен числен отговор – 1 т.

За правилен метод за определяне на съзвездие, в което ще бъде Сатурн – 3 т.

За вярно посочване на съзвездие – 1 т.

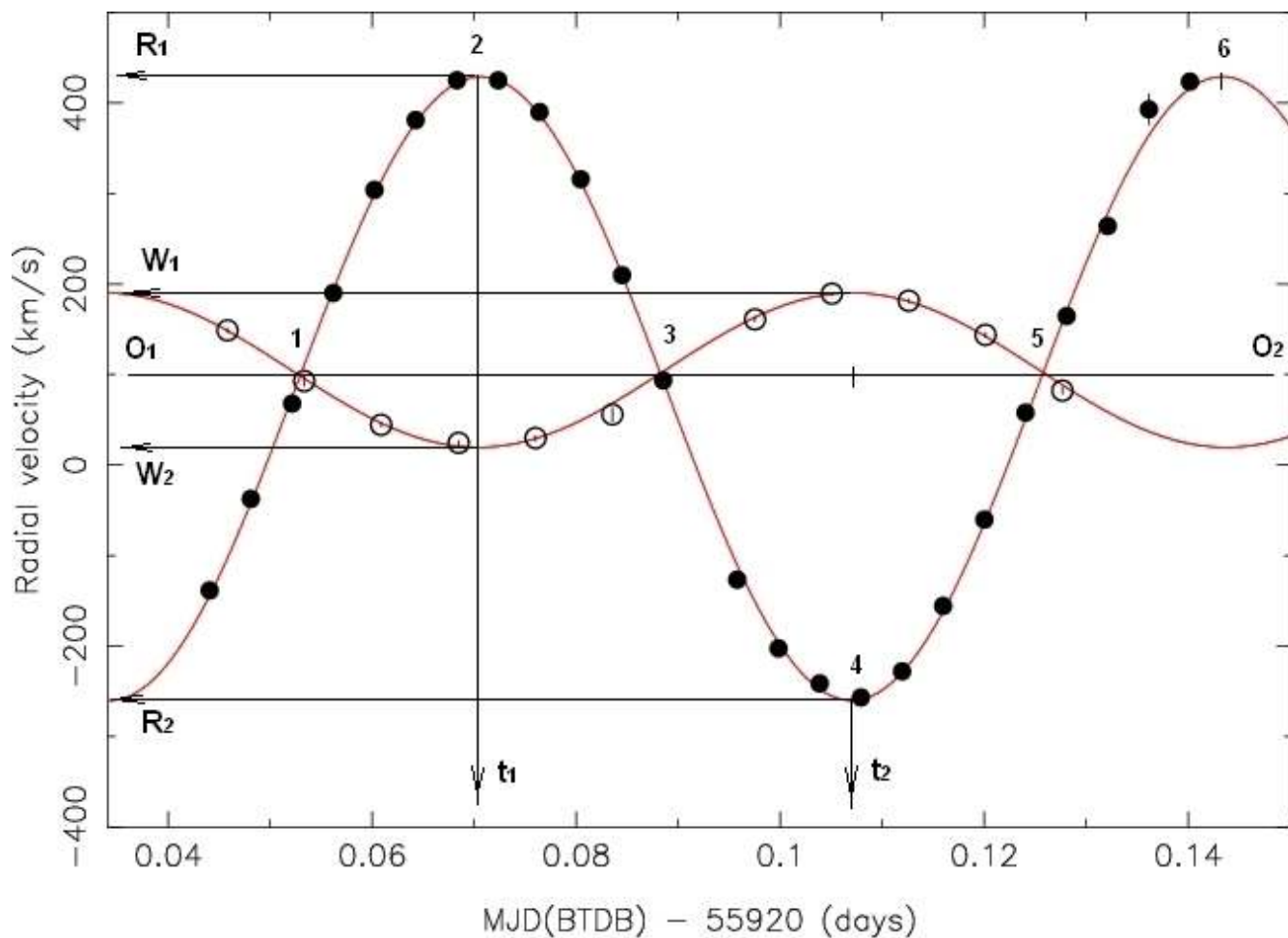
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
XVI НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Национален кръг, 14 април 2013 г., Кърджали

Възрастова група IX-X клас – практически кръг - решения

Практическа задача. Решение:

Понеже бялото джудже е по-масивна звезда от червеното джудже, то червеното джудже има по-голяма амплитуда на лъчевите скорости и следователно кривата с черните точки е негова, докато кривата на лъчевите скорости на бялото джудже е построена с незапълнени кръгчета.



Когато двете компоненти на една двойна звезда се движат перпендикулярно на лъча на зрение, тяхната лъчева скорост е равна на лъчевата скорост на центъра на масите на системата. Тъй като двете звезди и центъра на масите лежат на една права линия, това се случва едновременно за двете звезди. Следователно точките 1, 3 и 5, в които се пресичат кривите на лъчевите скорости, са тези моменти от време, в които звездите се движат в картинната плоскост и притежават лъчеви скорости, равни на лъчевата скорост на центъра на масите, т.е. лъчевата

скорост на двойната звезда относно Слънцето (При наблюдение налъчеви скорости всички стойности се привеждат към центъра на Слънцето, за да се премахне влиянието на орбиталното движение на Земята). Виждаме, че тази скорост е 100 km/s и тя се превръща за нас в нул-пункт, т.е. в стойност, от която ще отчитаме лъчевите скорости на всяка една от компонентите на звездата относно система свързана с центъра на масите на звездата. При измерване използваме разграфяването на осите като мащабни линии. Виждаме, че в точка **2** лъчевата скорост, относно центъра на масите, е равна на 330 km/s, а в точка **4** – на 360 km/s. Средната стойност е $V_{1R} = 345$ km/s. Аналогично за бялото джудже намираме средната лъчева скорост – $V_{2R} = 85$ km/s. За определяне на периода на системата използваме добре определените моменти в точки **1** и **5**. Може да се използват и точки **2** и **4**, като се има предвид, че времето между тях е равно на половината от периода на системата. За периода получаваме приблизително: $p = 1^h 45^m$.

За всяка една от компонентите може да напишем система от две уравнения:

$$L = 2\pi R$$

$$L = V_R \cdot p$$

Решаваме системата относно радиуса на орбитата:

$$R = \frac{V_R \cdot p}{2\pi}$$

За всяка от компонентите получаваме радиуса на орбитата:

За червеното джудже – $R_1 = 350400$ km.

За бялото джудже – $R_2 = 86350$ km.

Отношението на масите на компонентите в една двойна звезда е обратнопропорционално на разстоянието до центъра на масите. Следователно:

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{R_1}{R_2} = 4.06 \quad (1)$$

Виждаме, че бялото джудже е 4 пъти по-масивно от червеното джудже.

За определяне на масите на компонентите ще използваме третия закон на Кеплер. При двойни звезди този закон се пише за относителната орбита. Тя има голяма полуос равна на сумата от големите полуоси на двете компоненти. Периодът на системата е същият. Масата на основното тяло се приема за сума от масите на двете компоненти, а на другата звезда – за пренебрежимо малка.

$$\frac{R^3}{p^2} = \frac{\gamma(M_1 + M_2)}{4\pi^2}$$

където: $R = R_1 + R_2$.

За общата маса на системата получаваме:

$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2(R_1 + R_2)^3}{\gamma \cdot p^2} = 1.21 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 0.61 M_{\odot} \quad (2)$$

От уравнения (1) и (2) съставяме система от две уравнения с неизвестни M_1 и M_2 .

$$M_1 + M_2 = 0.61 M_{\odot}$$

$$\frac{M_2}{M_1} = 4.06$$

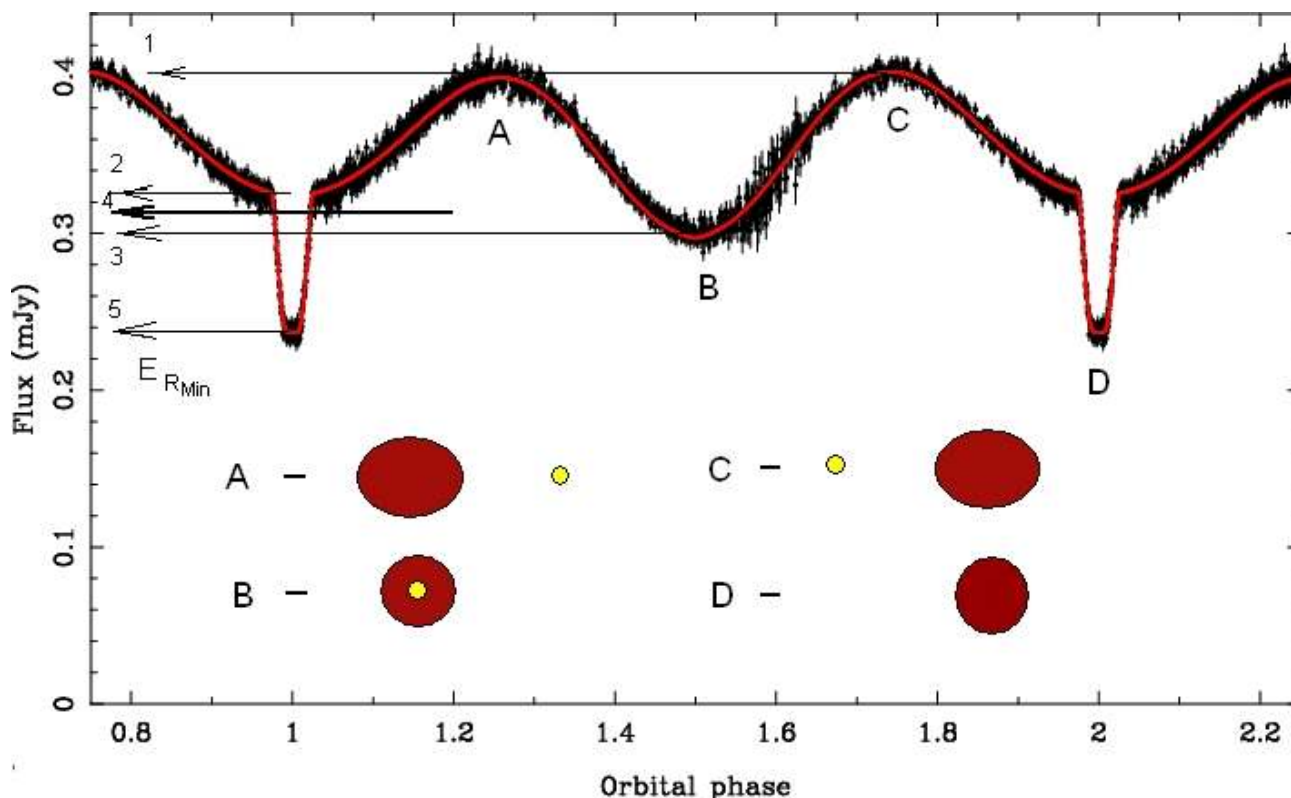
Решаваме системата и получаваме: $M_1 = 0.49 M_{\odot}$; $M_2 = 0.12 M_{\odot}$.

Схеми на разположението на компонентите в четирите характерни момента от кривата на блясъка са показани под кривата на блясъка на Фиг.2. В момента означен с буква D бялото джудже е скрито зад червената звезда.

Намираме стойностите на осветеностите в характерните моменти на кривата на блясъка. Стойностите имат следния смисъл:

1 – осветеност в максимума на блясъка, когато се вижда бялото джудже и максимална площ от червеното джудже. Тогава $E_1 = E_{R \text{ Max}} + E_W = 0.4$

2 – осветеност от бялото джудже, което се вижда много близо до червеното и предстои да бъде засенчено от него. Червеното джудже изглежда кръгло, с радиус, равен на малката полуос на елипсата. Тази страна е малко по-гореща от другата поради което осветеността е малко по-голяма, отколкото от страната обърната към бялото джудже. Ще използваме тази осветеност само при определяне на осветеността от бялото джудже. Тогава $E_2 = E_{R \text{ Min1}} + E_W = 0.328$.



3 – осветеност от бялото джудже и от минималната фаза на червеното джудже, но от страната с която е обърната към бялото джудже. Оказва се, че в този случай червеното джудже е малко по-слабо. Тогава $E_3 = E_{R \text{ Min2}} + E_W = 0.3$. Тази стойност се използва при пресмятането на средната осветеност в минимума на червеното джудже.

4 – средна осветеност от 2 и 3, която използваме като стойност на минимума на червеното джудже при определяне на отношението на осите му. Тогава $E_4 = E_{R \text{ Min}} + E_W = 0.314$.

5 – осветеност само от червеното джудже в минимална фаза, като бялото джудже се намира зад него и не дава принос към светимостта на системата. Тогава $E_5 = E_{R \text{ Min1}} = 0.238$.

Оттук следва, че приносът на бялото джудже към осветеността от системата е:

$$E_W = E_2 - E_5 = 0.09$$

Осветеността само от червеното джудже в максимум е:

$$E_{R \text{ Max}} = E_1 - E_W = 0.31$$

Осветеността само от червеното джудже в среден минимум е:

$$E_{R \text{ Min}} = E_4 - E_W = 0.224$$

За да определим отношението на осите на елипсоида на червеното джудже ще използваме разликата в осветеностите от червеното джудже в случаите когато то е ориентирано с най-голямото сечение към нас и с най-малкото сечение към нас. В първия случай площта на сечението е равна на площта на елипсата $S_1 = \pi ab$, а във втория – на площта на кръглото сечение на елипсоида $S_2 = \pi b^2$. Отношението на двете площи е равно на отношението на двете полуоси и на осветеностите в двата случая.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi ab}{\pi b^2} = \frac{a}{b} = \frac{E_{RMax}}{E_{RMin}} = 1.384 \quad \frac{a}{b} \approx 1.38$$

За определяне на температурата на бялото джудже ще използваме закона на Стефан – Болцман:

$$L = S \cdot \sigma \cdot T^4$$

където S е площта на излъчващото тяло, а L е неговата светимост.

В условието на задачата ни е даден средният радиус на червеното джудже. Затова намираме средната осветеност от него, която приблизително съответства на среден радиус.

$$E_R = \frac{E_{RMax} + E_{RMin}}{2} = 0.267$$

Осветеността от бялото джудже е :

$$E_W = 0.09$$

От закона на Стефан – Болцман следва:

$$\frac{L_R}{L_W} = \frac{R_R^2}{R_W^2} \cdot \frac{T_R^4}{T_W^4} = \frac{E_R}{E_W}$$

$$T_W = T_R \left(\frac{E_W}{E_R} \cdot \frac{R_R^2}{R_W^2} \right)^{\frac{1}{4}} T = 7800 \text{ K}$$

В действителност тази стойност се различава от истинската, защото осветеностите които използваме не са болометрични, а са получени в тесен спектрален диапазон във видимата част на спектъра. Затова, за да се получат по-достовърни стойности, на базата на наблюдателните данни за няколко спектрални диапазона, се строят модели на наблюдаваните звезди и по построените модели се пресмятат физическите параметри на звездите, които не могат да бъдат измерени директно.

Критерии за оценяване (общо 16 т.):

За правилно определяне на периода на системата – 2т.

За правилно определяне на радиусите – 2т.

За правилно определяне на отношението на масите, както и масите на двете компоненти – 3т.

За правилна схема на разположението на компонентите в характерните моменти от кривата на блясъка на звездата – 2т.

За правилен подход при работа с осветеностите в различни фази и при определянето на отношението на голямата към малката полуос на елипсоида на червеното джудже – 4т.

За правилен подход при определяне на температурата на бялото джудже – 2т.

За правилен числен отговор – 1т.